

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з курсу

«Математичне моделювання в економіці та менеджменті»

для студентів спеціальностей

6.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» та

6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 20.03.2015

Харків
НТУ «ХПІ»
2015

Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Математичне моделювання в економіці та менеджменті» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» та 6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / уклад. Білоцерківський О. Б. – Х. : НТУ «ХПІ», 2015. – 48 с.

Укладач О. Б. Білоцерківський

Рецензент О. О. Замула

Кафедра менеджменту зовнішньоекономічної діяльності та фінансів

ВСТУП

Електронна таблиця *Excel* є універсальним обчислювальним інструментом, знання якого обов'язкове для студентів економічних спеціальностей. Електронні таблиці відкрили нову епоху у програмуванні – так зване «програмування без мови», завдяки чому складні розрахунки стали доступними непрограмістам.

Вивчення проблем економіко-математичного моделювання в середовищі *Excel* має певні переваги порівняно з використанням спеціалізованих статистичних пакетів, в яких усі розрахунки виконуються автоматично і користувач отримує відразу готовий результат. *Мета методичних вказівок* – вивчити певні розділи навчального курсу економіко-математичного моделювання, показати, як знаходять ті або інші результати, освоїти особливості обчислювальних алгоритмів, довести теоретичні міркування до числа з подальшою інтерпретацією отриманих результатів і економічних висновків.

У даному виданні розглянуто основні числові методи, які використовуються в курсі «Математичне моделювання в економіці та менеджменті». Кожний розділ присвячений окремій темі курсу, і всі розділи побудовані однаково. Спочатку викладаються необхідні теоретичні відомості, потім докладно розглядаються розв'язання задач. Наприкінці кожного розділу наведено варіанти індивідуальних домашніх завдань, які вибираються за останньою цифрою номера залікової книжки студента.

Даними методичними вказівками не можна замінити підручники з економіко-математичного моделювання. Теоретичні основи викладаються у стислому вигляді. Даються тільки ті відомості, які необхідні безпосередньо для розв'язання задач. Для більш детального ознайомлення можна скористатися роботами [2–6].

1. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ В MS EXCEL

Мета роботи – освоїти роботу з функціями побудови графіків у *MS Excel*.

Етапи виконання роботи

1. Запуск програми *MS Excel*:

Пуск → Все программы → Microsoft Office → Microsoft Office Excel.

2. Розрахунок значень аргументу x .

Розмір рівного інтервалу має вигляд

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

де x_{\max} , x_{\min} – максимальне та мінімальне значення ознаки в сукупності;
 n – кількість відрізків ($x_2 = x_1 + h$).

3. Розрахунок значень функцій $y_i = a_i \cdot \ln x + \frac{b_i}{\sqrt[5]{x}}$, де $x \in [1; 3]$, $i = \overline{1, 2}$.

4. Побудова графіків функцій:

Вставка → Диаграмма → Точечная → Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями → Далее → Ряд → Добавить ряд.

Після цього у відповідних рядках *Значения X*, *Значения Y* зазначаємо діапазон.

Після появи першого графіка обираємо команду *Добавить → Ряд* і будуємо другий графік.

5. Оформлення роботи у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

Зразок виконання завдання показано на рис. 1.1.

Завдання 1. Побудова графіків функцій в MS Excel

Побудувати графіки функцій для двох значень параметрів: 1) $a_1 = 1$, $b_1 = 1,5$; 2) $a_2 = 2$; $b_2 = 2$. При цьому кількість відрізків становить $n = 10 + N$, де N – останній номер залікової книжки студента.

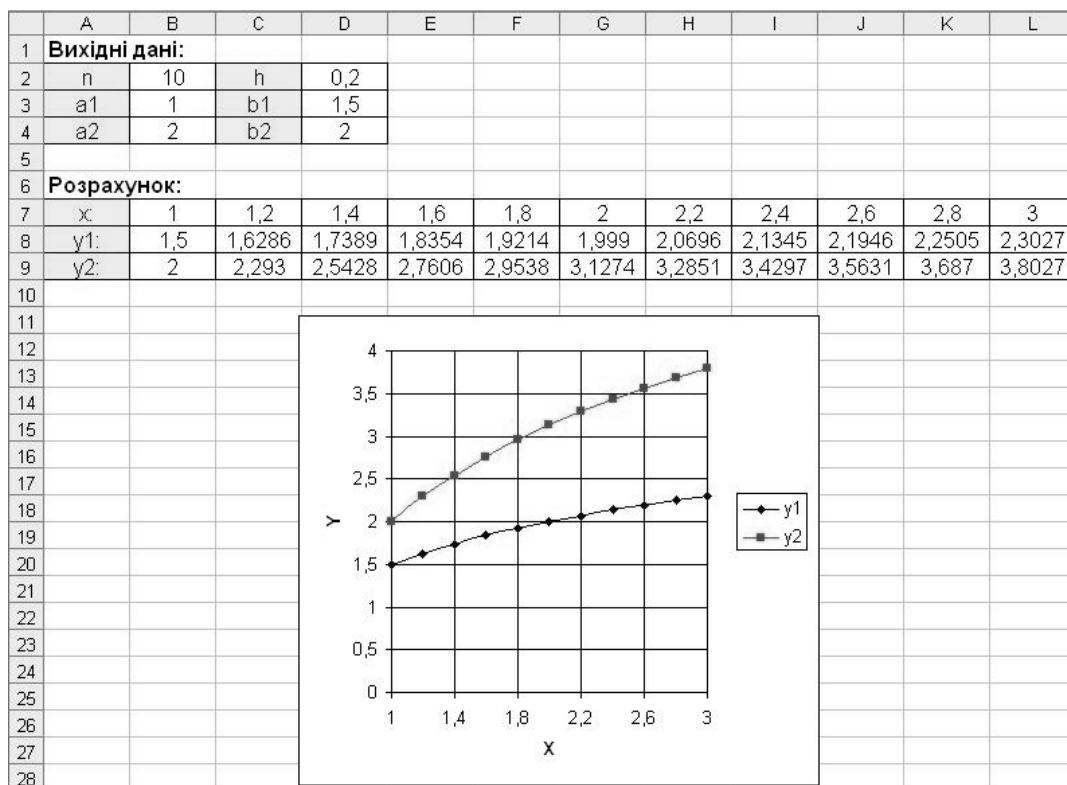


Рисунок 1.1

2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи – розв'язати задачу лінійного програмування (ЗЛП) графічним методом, результати подати в *MS Excel*.

Етапи виконання роботи

1. Для свого варіанту вихідних даних вибрати задачу та записати її математичну модель.
2. Позначити область допустимих розв'язків (ОДР) на координатній площині.
3. Показати лінії рівня цільової функції ($Z = 0$) та її градієнт \vec{g} .
4. Виділити оптимальну точку та знайти її координати.
5. Знайти значення цільової функції (ЦФ) в оптимальній точці.

6. Змінити коефіцієнти у ЦФ так, щоб задача мала множину оптимальних розв'язувань (надати один з можливих варіантів). Скласти новий графік.

7. Дати пораду стосовно того, що необхідно зробити для досягнення кращих результатів (визначити параметри моделі, які підлягають перегляду; коефіцієнти ЦФ залишити такими, як у п.1; повторити п 2–4 на новому графіку). Як зміниться значення ЦФ у новій оптимальній точці?

8. Оформити роботу у вигляді звіту на аркуші *Excel*. Зразок виконання завдання показано на рис. 2.1.

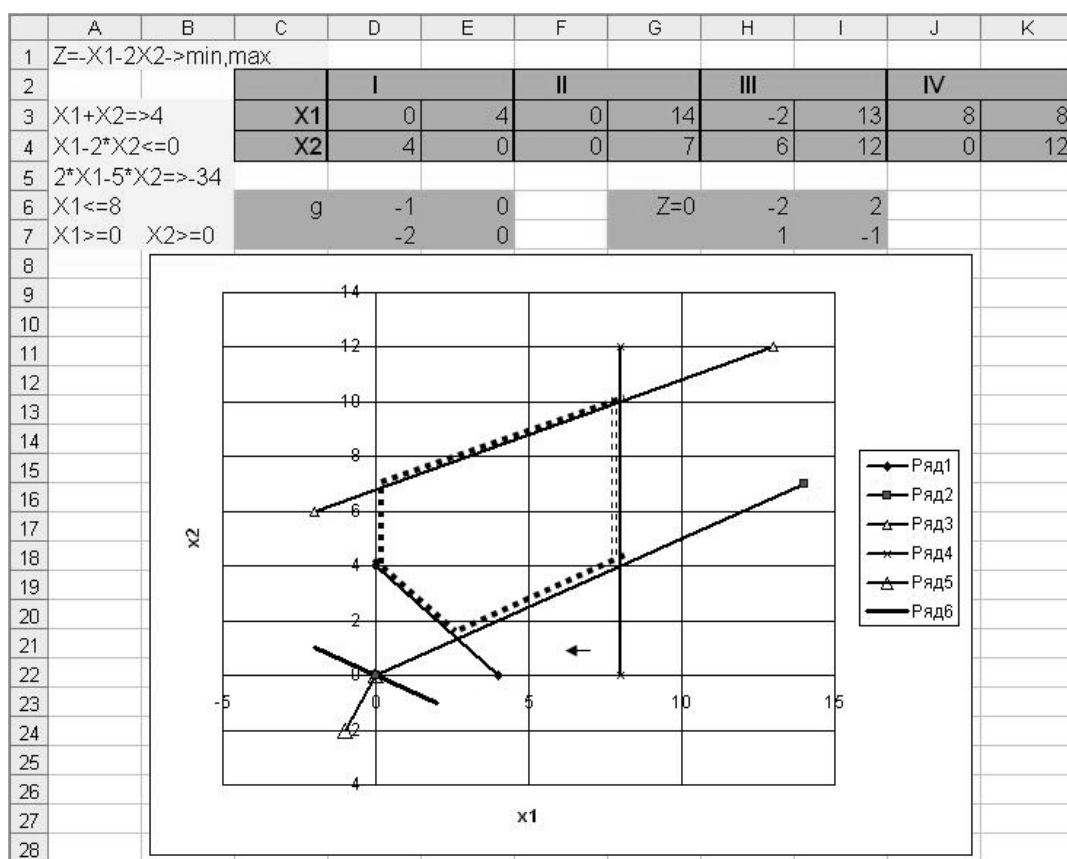


Рисунок 2.1

Завдання 2. Розв'язання ЗЛП графічним методом

Варіант 1. Фірма «Барви» виготовляє фарбу для внутрішніх (Φ_v) та зовнішніх (Φ_z) робіт. Для виготовлення фарб необхідно використовувати три види сировини C_1 , C_2 , C_3 . Основні дані знаходяться у таблиці.

Ресурси	Витрати сировини, тон/тону фарби		Максимально можливе щоденне використання сировини
	Для внутрішніх робіт	Для зовнішніх робіт	
Сировина C_1	4	6	24
Сировина C_2	2	1	6
Сировина C_3	5	3	необмежено
Прибуток на тону фарби, тис. грн	4	5	

Сировина C_3 є доступною у необмеженій кількості. Департамент маркетингу компанії обмежив щоденне виробництво фарби для внутрішніх робіт до 2 тон (через відсутність належного попиту), а також висунув вимогу: щоденне виробництво Φ_v не повинне перевищувати більш ніж на тону аналогічний показник виробництва Φ_3 . Компанія хоче визначити план випуску продукції Φ_v і Φ_3 для максимізації загального щоденного прибутку.

Варіант 2. Фірма щотижня виготовляє суміш кукурудзяного і соєвого борошна, склад яких наведено у таблиці.

Борошно	Білок, %	Клітковина, %	Вартість, грн/кг
кукурудзяне	9	2	3
соєве	60	6	7

Розробники продукту вимагають, щоб у ній було не менше ніж 30 % білка і не більше ніж 5 % клітковини. У суміші використовується не менше ніж 500 кг/тиждень соєвого борошна, кукурудзяного борошна – не менше ніж 1000 кг/тиждень. Необхідно встановити тижневу потребу фірми у кукурудзяному і соєвому борошні з урахуванням вимог розробників для мінімізації вартості суміші.

Варіант 3. Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна за добу споживати білків не менше 120 умовних одиниць (у. о.), жирів – не менше 70 і вітамінів – не менше 10 у. о. Вміст їх у кожній одиниці продуктів P_1 і P_2 дорівнює відповідно (0,2; 0,075; 0) і (0,1; 0,1; 0,1) у. о. Вартість 1 од. продукту P_1 – 2 грн, P_2 – 3 грн.

Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє так організувати харчування, щоб його вартість була мінімальною, а організм одержав необхідну кількість поживних речовин.

Варіант 4. На підприємстві випускається продукція двох видів А і Б. Для цього використовується сировина чотирьох типів: І, ІІ, ІІІ, ІV, запаси якої рівні відповідно 21, 4, 6, 10 од. Для виробу А необхідно таку кількість одиниць сировини чотирьох типів: 2, 1, 0, 2 од. Для виробу Б необхідно таку: 3, 0, 1, 1 од. Випуск одного виробу типу А дає 3 у.о. прибутку, одного виробу типу Б – 2 у.о. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Варіант 5. Для перевезення вантажу використовують машини типів А і Б. Вантажопідйомність машин кожного типу 3 т. За один раз машина типу А втрачає 1,5 кг мастильних матеріалів і 50 л бензину, а машина типу Б – відповідно 2 кг і 30 л. На базі є 35 кг мастильних матеріалів і 100 л бензину. Витрати на експлуатацію машини типу А становлять 80 грн, Б – 50 грн. Необхідно перевезти 60 т вантажу. Скільки потрібно використати машин типу А і Б, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними?

Варіант 6. Для виготовлення виробів двох типів А і Б є 200 кг металу. На виготовлення одного виробу типу А витрачається 2 кг металу, а одного виробу типу Б – 4 кг. Скласти план виробництва, що забезпечує одержання найбільшого прибутку від продажу виготовлених виробів, якщо один виріб типу А коштує 50 у.о., а один виріб типу Б – 70 у.о., причому виробів типу А можна виготовити не більше 60, і виробів типу Б – не більше 30.

Варіант 7. Завод побутової хімії виготовляє два види миючих засобів M_1 і M_2 , використовуючи при цьому сировину І і ІІ. Для виробництва миючих засобів щоденно є по 150 одиниць сировини. На отримання однієї одиниці M_1 використовується 0,5 одиниці сировини І і 0,6 одиниці сировини ІІ. На виробництво однієї одиниці M_2 витрачається 0,5 одиниці сировини І і 0,4 одиниці сировини ІІ. Прибуток на одну одиницю M_1 і M_2 складає відповідно 8 і 10 грн. Щоденне виробництво засобу M_1 має бути не менше ніж 30 і не більше ніж 150 одиниць. Для виробництва засобу M_2 аналогічні обмеження складають 40 і 300 одиниць відповідно. Визначте оптимальну структуру випуску миючих засобів.

Варіант 8. Нафтова компанія будує новий нафтопереробний завод для виробництва чотирьох видів продуктів: дизельне паливо, бензин, мастильні матеріали і авіаційне паливо. Попит на ці види продукції стабільно перевищує 14, 30, 10 і 12 тисяч барелів на день відповідно, і у довгостроковій перспективі залишиться таким самим. Компанія уклала контракти з Іра-

ном і Кувейтом на постачання сирової нафти танкерами. Компанія розраховує, що не менше ніж 40 % нафти вона отримуватиме з Ірану, а іншу – з Кувейту. Іранська і кувейтська нафта відрізняється своїми властивостями. З одного бареля іранської нафти можна виготовити 0,2 барелі дизпалива, 0,5 барелі бензину, 0,1 барелі мастильних матеріалів і 0,15 барелі авіаційного палива. Відповідні числа для кувейтської нафти складають 0,1; 0,6; 0,15 і 0,1. Компанії необхідно визначити мінімальне завантаження сировою нафтою свого нафтопереробного заводу.

Варіант 9. Студент Кіндрат любить їсти котлети і картоплю. Він вирішив харчуватися лише цими двома стравами. Для підтримання нормального стану організму потрібні вітаміни, мікроелементи і вода, які ми не беремо в розрахунок. Кіндрат розуміє, що це не зовсім здорове харчування, тому йому необхідно знати, скільки того чи іншого продукту необхідно з'їдати щодня виключно для отримання достатньої кількості поживних речовин. Він отримав інформацію щодо складу цих продуктів та їхньої вартості, наведену в таблиці.

Поживні речовини, г/порцію	Котлети	Картопля	Щоденне споживання, г	
Білки	25	4	не менше	40
Жири	25	2	не більше	70
Вуглеводи	15	30	не менше	70
Вартість порції	10	3		

Кіндрат хоче харчуватися так, щоб вартість його щоденного раціону була мінімальною. Допоможіть йому в цьому.

Варіант 10. Підприємство має ресурси двох типів у кількості 120 і 80 од. Ці ресурси використовуються для випуску продукції видів I і II, причому витрати на виготовлення одиниці продукції виду I дорівнюють 2 од. ресурсу першого типу та 2 од. ресурсу другого типу; на виготовлення одиниці продукції виду II – 3 од. ресурсу першого типу та 1 од. ресурсу другого типу. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду складає 6 у.о., другого виду – 4 у.о. Скласти план випуску продукції, який забезпечує найбільший прибуток при умові, що продукції першого виду повинно бути випущено не менше ніж продукції другого виду.

3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ *MS EXCEL* *ПОИСК РЕШЕНИЯ*

Мета роботи – для свого варіанта вихідних даних розв'язати ЗЛП за допомогою надбудови *Поиск решения*.

Етапи виконання роботи

1. Вихідну інформацію на робочому аркуші сформувати двома способами:

1.1. Записати вираз для ЦФ і лівих частин обмежень відразу у комірці (приклад 3.1), розв'язати задачу, аркуш назвати «Оптимальний розв'язок 1».

1.2. Записати параметри моделі у матричному вигляді і через них сформувати ЦФ та ліві частини обмежень (приклад 3.2), розв'язати задачу, аркуш назвати «Оптимальний розв'язок 2».

2. Порівняти отримані результати між собою.

3. Оформити роботу у вигляді звіту на аркуші *Excel*.

Приклад 3.1. Розв'язати ЗЛП за допомогою надбудови *Поиск решения*:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \leq 12; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.3)$$

Розв'язання

Крок 1. Відкрити програму *Microsoft Excel*

Пуск → Все программы → *Microsoft Office* → *Microsoft Office Excel*.

Крок 2. Записати вихідні дані у комірки

У комірках B1 і B2 знаходяться значення невідомих змінних x_1 та x_2 відповідно.

У комірці B4 запишемо вираз для цільової функції, використовуючи посилання на комірки B1 і B2, що «зарезервовані» для значень x_1 та x_2 . Тобто у комірці B4 необхідно записати формулу:

=3*B1+5*B2, що фактично є правою частиною виразу (3.1).

У комірках B6, B7, B8 записуємо ліві частини нерівностей (3.2):

=B1

=2*B2

=3*B1+2*B2

При виконанні цих дій значення у комірках B4, B6, B7, B8 дорівнюватимуть нулю, оскільки значення у комірках B1 і B2 відсутні, а *Excel* сприймає їх такими, що дорівнюють нулю. Як відомо, у більшості випадків початковий розв'язок симплекс-методу є нульовим, у нашому випадку $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Тому наявність нулів у комірках B4, B6, B7, B8 має сприйматися спокійно. Важливо, щоб тип значень у комірках, у яких мають бути числові значення, був числовим.

У комірках D6, D7, D8 записуємо праві частини нерівностей (3.2):

=4

=12

=18

Виконаних дій достатньо для формування вихідної інформації. На основі зарезервованих комірок B1, B2, а також формул і даних, що знаходяться в комірках B6, B7, B8 і D6, D7, D8 відповідно, за допомогою алгоритму надбудови *Поиск решения* можна знайти розв'язок задачі. Ці комірки виділимо сірим кольором.

Крок 3. Пояснення та інформація для користувача

Для того щоб користувачу було зручно працювати з уведеними даними, в робочому листі *Excel* необхідно вказати тип кожного функціонального обмеження (C6:C8), обмеження змінних на знак (C1:C2), тип оптимізації (C4) та записати пояснення до кожної комірки або групи комірок (комірки A1:A2, A4, A6:A8, рядки 3, 5). Ці дані хоча і не використовуються алгоритмом пошуку розв'язання задачі, проте вони допомагають користувачу у подальшій роботі безпосередньо з надбудовою *Поиск решения*.

Крок 4. Робота з надбудовою *Поиск решения*

Зайти у підменю *Сервис* → *Поиск решения*. На екрані з'явиться таке вікно, як і на рис. 3.4. Необхідно розмістити його так, щоб воно не закривало введену інформацію на робочому листі *Excel*.

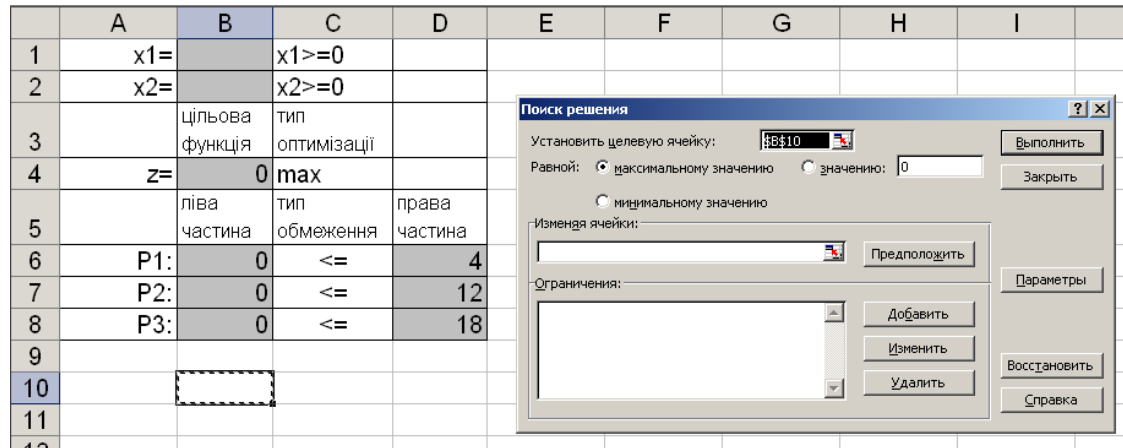


Рисунок 3.1

У полі *Установить целевую ячейку* необхідно вибрати комірку, у якій записано вираз для цільової функції. У нас це комірка B4. Далі пропонується обрати один з трьох взаємовиключних варіантів – типів оптимізації. Якби нам необхідно було мінімізувати цільову функцію, то ми обрали б вираз *минимальному значению*, проте за замовчуванням тип оптимізації – максимізація, як і в нашій задачі, тому переходимо відразу до наступного поля.

У полі *Изменяя ячейки* вказуються комірки, які зарезервовано під невідомі змінні (x_1 та x_2), а саме B1, B2. Адреси комірок вводяться через знак «;».

Далі необхідно вказувати типи обмеження. Програма *Поиск решения* не розрізняє функціональні обмеження і обмеження на знак. Тому всі вони вводяться за допомогою кнопки *Добавить*. Після натиснення на кнопку з'явиться ще одне віконце, яке має три поля (рис. 3.2, а). У полі ліворуч вказується комірка, у якій знаходиться вираз для лівої частини функціонального обмеження. У центральному полі обирається тип обмеження (\leq , $=$, \geq) та тип невідомих змінних. За замовчуванням тип змінних дійсний, як і у нашій задачі, тому виконувати якісь дії щодо обрання типу змінних для даної задачі не потрібно. У полі праворуч вказується комірка, у якій знахо-

диться права частина функціонального обмеження. На рис. 3.2, б показано віконце після введення в поле необхідних даних для першого обмеження.

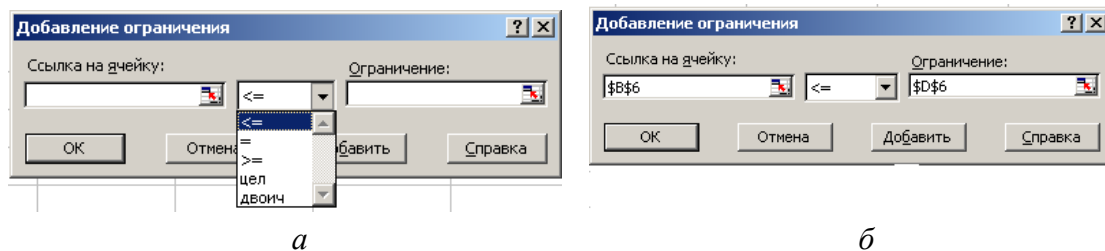


Рисунок 3.2

Для введення наступних функціональних обмежень і обмежень на знак необхідно виконувати ті самі дії і користуватися кнопкою *Добавить*. При введенні обмежень на знак у полі ліворуч робиться посилання на відповідну змінну, а у полі праворуч вводиться число «0», при цьому обирається тип нерівності «>=» або «<=». Після введення всіх обмежень необхідно натиснути на кнопку *ОК*, після чого робоче вікно надбудови *Поиск решения* матиме такий вигляд, як на рис. 3.3.

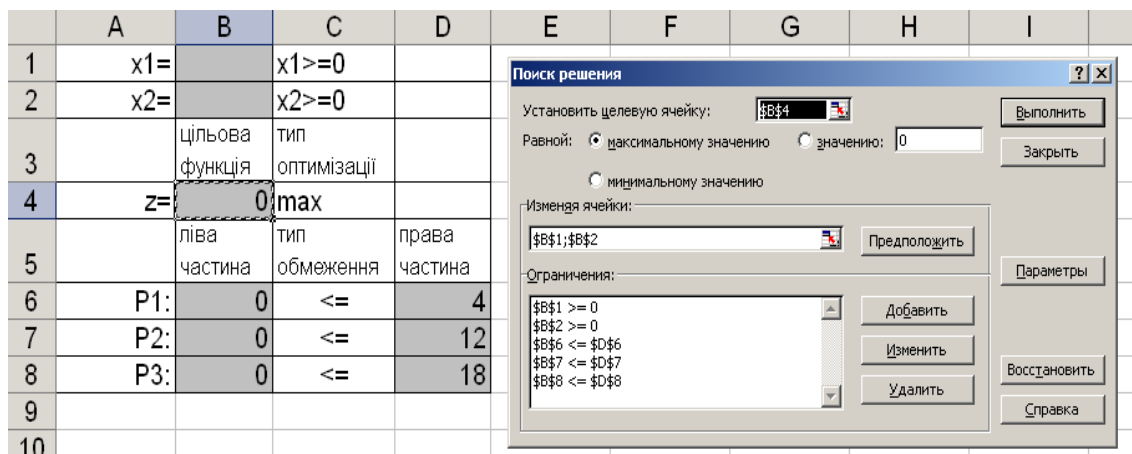


Рисунок 3.3

З рис. 3.3 видно, що хоча обмеження на знак вводяться так, як і функціональні обмеження, проте в списку *Ограничения* першими йдуть саме обмеження на знак.

Крок 5. Отримання розв'язку задачі і аналіз результатів

Після того як всі дії виконано, натиснути кнопку *Выполнить*. На екрані вікно *Поиск решения* зміниться вікном *Результаты поиска решения*, так, як це показано на рис. 3.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x1=	2	x1>=0						
2	x2=	6	x2>=0						
3		цільова функція	тип оптимізації						
4	z=	36	max						
5		ліва частина	тип обмеження	права частина					
6	P1:	2	<=	4					
7	P2:	12	<=	12					
8	P3:	18	<=	18					

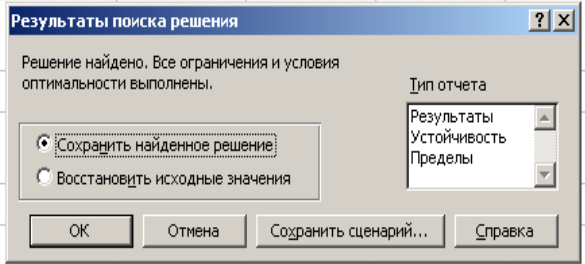


Рисунок 3.4

Як видно з рис. 3.4, при появі цього вікна порожні до цього комірки B1 і B2 отримали свої значення, які і є розв'язком задачі. Про те, що вони є оптимальним допустимим розв'язком свідчить надпис у вікні *Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены*. Функції даного вікна дозволяють на окремих робочих листах *Excel* отримати детальний звіт щодо розв'язку задачі, обравши для цього необхідні звіти у списку *Тип отчета*. Про подробиці можна дізнатися у спеціальній літературі. Для виходу з поточного вікна треба натиснути на кнопку *OK*.

Приклад 3.2. Інший підхід до запису вихідної інформації

У розглянутому вище прикладі кількість змінних і обмежень невелика, отже, і кількість параметрів задачі була невеликою, тому вирази для ЦФ і лівої частини обмежень записувалися безпосередньо у комірки B4, B6:B8. У задачах зі значно більшою кількістю параметрів даний підхід щодо запису вихідних даних є нераціональним, тому пропонується записувати вихідні

дані у матричному вигляді. Для цього необхідно згадати основи матричної алгебри.

Запишемо ЦФ у матричному вигляді:

$$Z = C^T X; C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Функціональні обмеження у матричному вигляді:

$$AX \leq B; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок цієї ж задачі, підготувавши вихідні дані у інший спосіб.

У стовпці А будемо записувати пояснення для введених даних. Комірки В1, С1 зарезервуємо для значень невідомих змінних. Під ними у рядку 2 запишемо, які саме змінні знаходяться там, та обмеження їх на знак, якщо воно є. У комірках В3 і С3 запишемо елементи вектора C , у комірках В4:В6, С4:С6 – елементи матриці A , у комірках F4:F6 – елементи вектора B . Вираз для цільової функції та лівої частини функціональних обмежень отримаємо як добуток вектора x на відповідний рядок матриці A . Для цього скористаємося функцією *СУММПРОИЗВ*, параметрами якої є два вектори однакової довжини, а результатом буде скаляр – добуток цих векторів. Запис у D3 має бути таким:

$$=СУММПРОИЗВ(\$B\$1:\$C\$1;B3:C3)$$

Скопіювавши цю формулу у три нижні комірки, отримаємо ті самі вирази, що і в комірках В4, В6, В7, В8 попереднього прикладу (див. крок 2), тільки в інший спосіб. У комірках Е4:Е6 запишемо тип відповідного обмеження, а у комірках D2:F2 – пояснення до нижніх комірок. Після цього можна запускати *Поиск решения* та діяти у той самий спосіб, що і в попередньому прикладі. Скориставшись тим, що функціональні обмеження мають однаковий тип (\leq) і обидві змінні мають бути невід'ємними, запис у полі *Ограничения* буде лаконічнішим (рис. 3.5). Залишається виконати команду *Выполнить* і самому переконатися, що розв'язок буде такий самий.

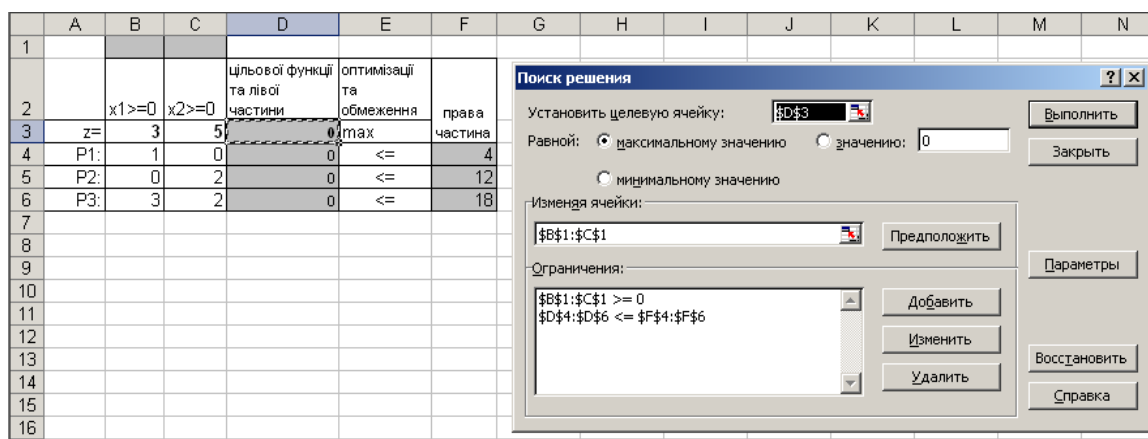


Рисунок 3.5

Попри те, що кількість інформації на робочому листі *Excel* збільшилася, стало легше відстежувати параметри моделі і у разі необхідності міняти їх, не змінюючи при цьому вирази для ЦФ та лівої частини обмежень, а також витрачати менше часу на їх запис. Отже, перший підхід є менш продуктивним, а при великій кількості змінних — взагалі непридатним.

Висновок. Ми вивчили не всі можливості надбудови *Поиск решения*, наприклад, навіть не торкалися теми зміни параметрів пошуку. Проте розглянутих у прикладі можливостей достатньо для розв’язування переважної більшості задач лінійного, цілочислового і навіть нелінійного програмування. Використовуючи надбудову *Поиск решения*, ми отримали:

- 1) розв’язок задачі лінійного програмування $x_1 = 2$, $x_2 = 6$;
- 2) значення ЦФ в оптимальній точці $Z = 36$;
- 3) обмеження 1, що не впливає на розв’язок, оскільки $2 \leq 4$.

Завдання 3. Розв’язання задач лінійного програмування за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*

Варіант 1. На підприємстві випускається продукція двох видів: А, Б. Для цього використовується сировина чотирьох типів: І, ІІ, ІІІ, ІV, запаси якої дорівнюють відповідно 21, 4, 6, 10 од. Для виробу А необхідна така кількість одиниць сировини чотирьох типів: 2, 1, 0, 2 од. Для виробу Б — така: 3, 0, 1, 1 од. Випуск одного виробу типу А дає 3 у. о. прибутку, одного

виробу типу Б – 2 у. о. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Варіант 2. Підприємство випускає три види виробів. Місячна програма випуску становить 200 виробів першого виду, 1800 – другого, 1500 – третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61000 кг. На один виріб 1-го виду витрачається 8 кг матеріалу, 2-го – 10 кг, 3-го – 11 кг. Оптова ціна одного виробу першого виду становить 7 грн, другого і третього – 10 і 19 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, який забезпечує підприємству максимальний прибуток.

Варіант 3. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро та книжкові шафи, використовуючи два різних види дощок, причому фабрика має 500 м³ дощок першого виду і 1000 м³ дощок другого. Крім того, задані трудові ресурси становлять 800 людино-годин. У таблиці наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу і прибуток на один виріб.

Ресурси	Витрати на одиницю продукції			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дощки першого виду, м ³	5	1	9	12
Дощки другого виду, м ³	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд.-год.	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, тис. грн	12	5	15	10

За цими вихідними даними розв'язати задачу. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

Варіант 4. Для виробництва трьох видів виробів (A , B , C) використовуються три різних види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний у кількості, не більшій відповідно 180, 210 й 244 кг. Для виробу A необхідно така кількість одиниць сировини трьох видів: 4, 3, 1 кг; для виробу B – така: 2, 1, 2 кг; для виробу C – така: 1, 3, 5 кг. Випуск одного виробу типу A дає 10 у. о. прибутку, одного виробу типу B – 14 у. о., одного виробу типу C – 12 у. о. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Варіант 5. Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна у добу споживати білків не менше 120 у. о., жирів – не менше 70 у. о. і вітамінів – не менше 10 у. о. Вміст їх у кожній одиниці продуктів P_1 і P_2 дорівнює відповідно $(0,2; 0,075; 0)$ і $(0,1; 0,1; 0,1)$ у. о. Вартість 1 од. продукту P_1 становить 2 грн, P_2 – 3 грн. Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє так організувати харчування, щоб його вартість була мінімальною, а організм одержав необхідну кількість поживних речовин.

Варіант 6. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі (A_1, A_2, A_3) використовує три види сировини: цукор-пісок, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво одної тонни карамелі кожного виду подано в таблиці; також відома загальна кількість сировини кожного виду і прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 тонну продукції			Об'єм сировини, т
	A_1	A_2	A_3	
Цукор-пісок	0,3	0,2	0,1	1000
Патока	0,8	0,2	0,3	800
Фруктове-пюре	0,4	0,1	0,1	150
Прибуток від реалізації 1 т продукції, тис. грн	1,2	3,2	2,5	–

Необхідно знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 7. Підприємство має ресурси двох типів у кількості 120 і 80 од. Ці ресурси використовуються для випуску продукції видів I і II, причому витрати на виготовлення одиниці продукції виду I дорівнює 2 од. ресурсу першого типу та 2 од. ресурсу другого типу; на виготовлення одиниці продукції виду II – 3 од. ресурсу першого типу та 1 од. ресурсу другого типу. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду складає 6 у. о., другого виду – 4 у. о. Скласти план випуску продукції, який забезпечує найбільший прибуток за умови, що продукції першого виду має бути випущено не менше ніж продукції другого виду.

Варіант 8. На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців, для яких заготовляють три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні щоденно одержувати звірі, загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана фермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця подані в таблиці. Визначити, скільки лисиць і песців необхідно виростити на фермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальний.

Вид корму певного типу	Кількість одиниць корму, якого щоденно потребують тварини		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
I	2	3	360
II	4	1	480
III	6	7	852
Прибуток від реалізації однієї шкурки, грн	32	25	—

Варіант 9. На підприємстві застосовується сталь трьох марок: *A*, *B*, *C*. Запаси її обмежені та дорівнюють відповідно 10, 16 і 12 од. Підприємство випускає два види виробів: I, II. Для виробу I необхідна одна одиниця сталі всіх марок. Для виробу II – дві одиниці сталі марки *B*, 1 одиниця марки *C* і не потрібна сталь марки *A*. Від реалізації одиниці виробу виду I підприємство одержує 3 у. о. прибутку, виду II – 2 у. о. Скласти план випуску продукції, що повинен забезпечити найбільший прибуток.

Варіант 10. Фабрика випускає три види тканин. Добові ресурси фабрики становлять 700 од. виробничого устаткування, 800 од. сировини й 600 од. електроенергії, витрати яких на одиницю тканини такі: для устаткування за видами тканини – 2, 3 і 4 од., для сировини – 1, 4 і 5 од., для електроенергії – 3, 4 і 2 од. Ціна одного метра тканини першого виду становить 8 у. о., другого виду – 7 у. о., третього виду – 6 у. о. Скільки необхідно виготовити тканини кожного виду, щоб прибуток від реалізації був максимальним?

4. АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ НА ЧУТЛИВІСТЬ У MS EXCEL

Мета роботи – за вихідними даними завдання 3 провести аналіз оптимального розв'язання на чутливість в *MS Excel*.

Теоретичні частина

Неминучі коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку і таке інше можуть призвести до неоптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для врахування подібних ситуацій проводиться **аналіз чутливості**, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів початкової моделі вплинуть на отриманий раніше оптимальний розв'язок ЗЛП.

Для розв'язання задач аналізу чутливості обмеження лінійної моделі класифікуються таким чином. **Зв'язуючі** обмеження проходять через оптимальну точку. **Незв'язуючі** обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс, що подається зв'язуючим обмеженням, називають **дефіцитним**, а ресурс, що подається незв'язуючим обмеженням, – **недефіцитним**. Обмеження називають **надмірним** у тому випадку, якщо його виключення не впливає на ОДР і, отже, на оптимальне рішення. Виділяють такі три задачі аналізу на чутливість.

1. Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:

- на скільки можна збільшити (обмеження типу \leq) або зменшити (обмеження типу \geq) запас *дефіцитного* ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?
- на скільки можна зменшити (обмеження типу \leq) або збільшити (обмеження типу \geq) запас *недефіцитного* ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

2. Збільшення (обмеження типу \leq) запасу якого з ресурсів є найви- гіднішим?

3. Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ: який діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальне рішення?

Приклад 4.1. Побудувати і проаналізувати математичну модель компанії з виробництва дубових стільців «*Oak Products*».

Компанія «*Oak Products*» виробляє стільці 2-х типів: *Mate* і *Captain*. Стільці сконструйовані так, що для їх виготовлення можна використовувати ряд взаємозамінних деталей: довгі та короткі штифти, міцні і полегшені сидіння, а також важку і легку поперечину. Крім того, кожен тип стільців має відмінну від інших напрямну, на яку кріпиться спинка. Дані про кількість необхідних деталей для стільців кожного типу, запас деталей, а також питомий прибуток від продажу одного стільця кожного типу наведено в таблиці.

Необхідно рекомендувати стратегію виробництва на тиждень, тобто визначити за допомогою надбудови *Excel Поиск решения*, яку кількість стільців кожної марки потрібно виготовити, щоб при їх реалізації отримати максимальний тижневий валовий (різниця доходу і витрат) прибуток, якщо згідно з угодою між керівництвом компанії і замовником загальна кількість стільців, що виробляються, не може бути менша ніж 100.

Найменування деталей	Тип стільців та необхідна кількість деталей для виробництва одного стільця кожної марки		Запас деталей
	<i>Captain</i>	<i>Mate</i>	
Довгі штифти	8	4	1280
Короткі штифти	4	12	1600
Ніжки	4	4	760
Міцні сидіння	1	0	140
Полегшені сидіння	0	1	120
Питомий валовий прибуток (дохід – витрати), \$	56	40	–

Розв’язання. При ухваленні рішення в даній моделі необхідно враховувати такі чинники:

1) Стільці, що виготовлені компанією, продаються на тому ж тижні, питомий валовий прибуток складає 56 у. о. і 40 у. о. для кожного проданого стільця марки *Captain* і *Mate* відповідно.

2) Для збирання стільців потрібні довгі штифти, короткі штифти і один з двох типів сидінь, які є на складі в обмеженій кількості.

3) Запас длинных и коротких шурупов, які можна буде використовувати наступного тижня, складає 1280 і 1600 штук відповідно. Для виробництва одного стільця марки *Captain* потрібно 8 длинных і 4 коротких шурупа, а для виробництва стільця *Mate* – 4 длинных і 12 коротких шурупів.

4) Запас ножек на наступний тиждень складає 760 штук. Для виробництва стільця будь-якого типу потрібно 4 ножки.

5) Запас міцних і полегшених сидінь складає 140 і 120 штук відповідно.

6) Згідно з угодою між керівництвом компанії і замовниками загальна кількість виготовлених стільців не може бути менша ніж 100 штук.

Враховуючи все згадане вище, математична модель задачі має такий вигляд: знайти максимальне значення $Z = 56x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$

$$\text{при обмеженнях} \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \leq 1280, \\ 4x_1 + 12x_2 \leq 1600, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 760, \\ x_1 \leq 140, \\ x_2 \leq 120, \\ x_1 + x_2 \geq 100, \\ x_j \geq 0 (j=1,2,3). \end{cases}$$

Математичну модель даної задачі можна подати в *Excel* (рис. 4.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стульев	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество			0			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные шурупы	8	4	0	≤	1280	1280,00
7	Короткие шурупы	4	12	0	≤	1600	1600,00
8	Ножки	4	4	0	≤	760	760,00
9	Прочные сиденья	1	0	0	≤	140	140,00
10	Облегченные сиденья	0	1	0	≤	120	120
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	0	≥	100	-100

Поиск решения

Установить целевую ячейку:
 Равной: ☒ максимальному значению
☐ минимальному значению

Изменить ячейки:

Ограничения:

Рисунок 4.1

На рис. 4.1 показано:

- вікно надбудови *Excel Поиск решения*, де внесені всі необхідні дані для розрахунку оптимальних значень;

- у комірці D4 вписана формула цільової функції

=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B3:C3),

- комірки D6: D10 і D12 містять інформацію про обмеження задачі

D6 =СУММПРОИЗВ(B4:C4;B6:C6),

D7 =СУММПРОИЗВ(B4:C4;B7:C7),

.....

D12 =СУММПРОИЗВ(B4:C4;B12:C12).

На рис. 4.2 наведено оптимальні значення змінних і цільової функції (комірки B4, C4, D4).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стульев	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество	130	60	9680			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1280	<=	1280	0
7	Короткие штифты	4	12	1240	<=	1600	360
8	Ножки	4	4	760	<=	760	0
9	Прочные сиденья	1	0	130	<=	140	10
10	Облегченные сиденья	0	1	60	<=	120	60
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	190	>=	100	90
13							
14							
15							

Рисунок 4.2

Звіт за результатами розв'язування наведено на рис. 4.3.

На рис. 4.3 в графі «Статус»:

- **несвязанное** — означає, що відповідне обмеження є нелімітуючим і існує резерв (надлишок деталей, якщо « \leq » або перевищення від мінімально необхідної норми, якщо « \geq »), тобто різниця між лівою і правою частинами після підставляння знайдених змінних не дорівнює нулю, а отже, змінні резерву більше нуля. Тому можна зменшити початкові запаси відповідних деталей на цю кількість резерву;

- **связанное** — означає, що резерву немає і відповідні обмеження є лімітуючими, тобто на лініях або перетині прямих цих обмежень знаходиться точка, що дає оптимальне значення невідомих змінних задачі.

E31

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Oak Products_Model and Results.xls]Лист1					
3	Отчет создан: 01.04.09 0:04:56					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$D\$4	Произведенное количество Прибыль	0	9680		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$4	Произведенное количество Captain	0	130		
14	\$C\$4	Произведенное количество Mate	0	60		
15						
16						
17	Ограничения					
18	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
19	\$D\$6	Длинные штифты Суммарное потребление	1280	\$D\$6<=\$F\$6	связанное	0
20	\$D\$7	Короткие штифты Суммарное потребление	1240	\$D\$7<=\$F\$7	не связан.	360
21	\$D\$8	Ножки Суммарное потребление	760	\$D\$8<=\$F\$8	связанное	0
22	\$D\$9	Прочные сиденья Суммарное потребление	130	\$D\$9<=\$F\$9	не связан.	10
23	\$D\$10	Облегченные сиденья Суммарное потребление	60	\$D\$10<=\$F\$10	не связан.	60
24	\$D\$12	Произведено согласно договору Стулья	190	\$D\$12>=\$F\$12	не связан.	90
25	\$B\$4	Произведенное количество Captain	130	\$B\$4>=0	не связан.	130
26	\$C\$4	Произведенное количество Mate	60	\$C\$4>=0	не связан.	60
27	\$B\$4	Произведенное количество Captain	130	\$B\$4=целое	связанное	0
28	\$C\$4	Произведенное количество Mate	60	\$C\$4=целое	связанное	0
29						

Рисунок 4.3

Звіт зі стійкості складається з двох таблиць (рис. 4.4). Цей звіт не містить інформації про те, як змінюються оптимальні значення змінних. У цьому звіті тільки показано, як змінюється оптимальне значення цільової функції при зміні правої частині обмеження.

F26								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Oak Products_Model and Results.xls]Model							
3	Отчет создан: 01.04.09 0:06:17							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
8	\$B\$4	Произведенное количество Captain	130	0	56	24	16	
9	\$C\$4	Произведенное количество Mate	60	0	40	16	12	
10								
11								
12	Ограничения							
13	Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
14	\$D\$6	Длинные штифты Суммарное потребление	1280	4	1280	40	180	
15	\$D\$7	Короткие штифты Суммарное потребление	1240	0	1600	1E+30	360	
16	\$D\$8	Ножки Суммарное потребление	760	6	760	72	40	
17	\$D\$9	Прочные сиденья Суммарное потребление	130	0	140	1E+30	10	
18	\$D\$10	Облегченные сиденья Суммарное потребление	60	0	120	1E+30	60	
19	\$D\$12	Произведено согласно договору Стулья	190	0	100	90	1E+30	
20								
21								
22								

Рисунок 4.4

Таблиця 1 (рядки 6–10 на рис. 4.4) містить інформацію, що відноситься до змінних (і до коефіцієнтів ЦФ):

1. Результат розв’язування задачі.

2. Нормована вартість, яка показує, на скільки зміниться значення ЦФ у разі примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальне розв’язання. *Нормированная стоимость* дорівнює нулю, якщо змінна розв’язку в оптимальній точці невід’ємна. Якщо оптимальне значення змінної дорівнює нулю, то *нормированная стоимость* у відповідному рядку дорівнює значенню в стовпцях *Допустимое увеличение* або *Допустимое уменьшение* (одне з цих значень буде нескінченним, а інше дорівнюватиме нормованій вартості)

3. Коефіцієнти ЦФ.

4. Граничні значення приросту цільових коефіцієнтів (стовпці G, H, рядки 9, 10), при яких зберігається первинний оптимальний розв’язок (решта даних залишається постійними). Наприклад, *допустимое увеличение* ціни на стільці марки *Mate* дорівнює \$16, а *допустимое уменьшение* – \$12. Це означає, що якщо ціна на стільці цієї марки зросте більш ніж на \$16 і впаде менш ніж на \$12, то оптимальне значення зміниться.

Таблиця 2 (рядки 12–20 на рис. 4.4) містить інформацію, що відноситься до обмежень:

1. Величина ресурсів, що використовуються в колонці *Результ. значение* (рис. 4.4, стовпець D, рядки 13–14).

2. Граничні значення приросту ресурсів (праві частини системи обмежень) показують, на скільки можна зменшити (усунути надлишок) або збільшити (підвищити мінімально необхідну вимогу) ресурс, зберігши при цьому оптимальний розв’язок. У даній задачі існують обмеження (деталі), ресурси яких є дефіцитними – це *Длинные штифты* і *Ножки* (рис. 4.3, рядки 19 і 21, стовпець G). Оскільки знак обмежень цих запасів має вигляд « \leq », то виникає питання, на скільки максимально повинен зрости запас цих деталей, щоб забезпечити збільшення випуску продукції. Відповідь на це питання міститься в графі *Допустимое увеличение* на рис. 4.4, рядок 15 і 17, стовпець G. Запас довгих штифтів має сенс збільшити на 40 шт., а ніжок – на 72 шт. Це приведе до нових оптимальних розв’язків, що збільшують прибуток. Подальше збільшення запасів цих деталей понад указані межі не покращуватиме розв’язок, оскільки інші ресурси можуть стати такими, що зв’язуються.

3. Цінність додаткової одиниці i -го ресурсу становить **тіньову ціну**, яка розраховується тільки для дефіцитних ресурсів. Після того як буде встановлено, що збільшення запасів деталей довгих штифтів і ніжок приведе до нових планів випуску, які забезпечать вищий прибуток, виникає питання: «Запас яких деталей вигідніше насамперед збільшувати?». Відповідь на це питання дає стовпець **Теневая цена** (див. рис. 4.4, рядки 15 і 17, стовпець E). Для довгих штифтів тіньова ціна дорівнює 4, а для ніжок – 6, тобто кожен додатковий довгий штифт збільшить прибуток на \$4 (рис. 4.5), а кожна додаткова ніжка – на \$6 (рис. 4.6). Отже, *насамперед вигідно збільшувати запаси ніжок*.

Допустимий діапазон значень правої частини обмеження, для якого тіньова ціна залишається постійною, вказаний в табл. 2 **Ограничения** (рис. 4.4) в стовпцях *Допустимое увеличение* і *Допустимое уменьшение*.

Тіньова ціна нелімітуючого обмеження завжди дорівнює нулю!

F7	1600						
	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стульев	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество	140	50	9840			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1320	≤	1320	0,00
7	Короткие штифты	4	12	1160	≤	1600	440
8	Ножки	4	4	760	≤	760	0,00
9	Прочные сиденья	1	0	140	≤	140	0,00
10	Облегченные сиденья	0	1	50	≤	120	70
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	190	≥	100	90
13							

Рисунок 4.5

F9	140						
	A	B	C	D	E	F	G
1		Модель Oak Products					
2	Тип стульев	Captain	Mate				
3	Удельная прибыль	56	40	Прибыль			
4	Произведенное количество	112	96	10112			
5		Потребность в деталях		Суммарное потребление		Начальный запас	Конечный запас
6	Длинные штифты	8	4	1280	≤	1280	0,00
7	Короткие штифты	4	12	1600	≤	1600	0,00
8	Ножки	4	4	832	≤	832	0,00
9	Прочные сиденья	1	0	112	≤	140	28,00
10	Облегченные сиденья	0	1	96	≤	120	24
11				Стулья		Мин. Производство	Резерв
12	Произведено согласно договору	1	1	208	≥	100	108
13							

Рисунок 4.6

5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

5.1. Розв'язання задач цілочислового програмування

Мета роботи – для свого варіанта вихідних даних розв'язати ЗЛП в *MS Excel* з урахуванням умови цілочисельності.

Приклад 5.1. Розв'язати задачу цілочислового програмування (ЗЦП) за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*:

$$Z = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4})$$

$$x_j \in Z.$$

Розв'язання. Якщо до умови задачі додалася вимога цілочисельності значень усіх змінних, то процес введення умови задачі необхідно доповнити такими кроками:

1. В екранній формі указати, на які змінні накладається вимога цілочисельності. Цей крок робиться для наочності сприйняття умови задачі (рис. 5.1).

2. У вікні *Поиск решения* (меню *Сервис* → *Поиск решения*) натиснути кнопку *Добавить* та у вікні *Добавление ограничений*, що з'явилося, ввести обмеження в такий спосіб (рис. 5.2):

- у рядку *Ссылка на ячейку* ввести адреси комірок змінних задачі, тобто $\$B\$3:\$E\3 ;

- у рядку введення знака обмеження встановити *целое*;
- підтвердити введення обмеження натисканням кнопки *ОК*.

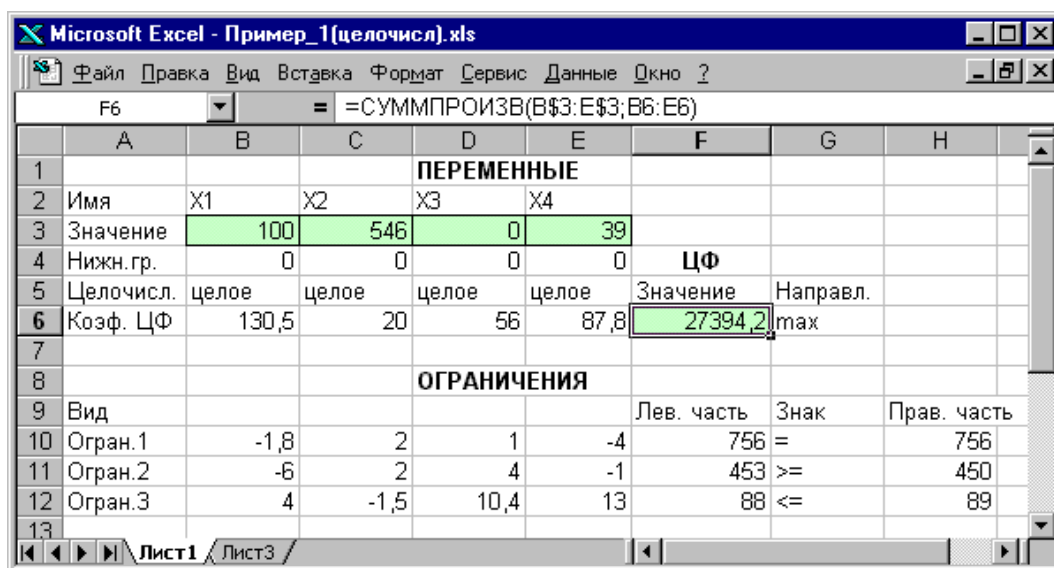


Рисунок 5.1

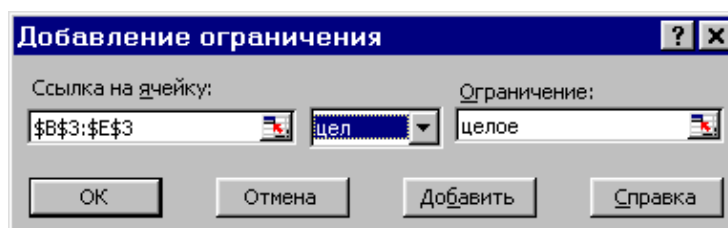


Рисунок 5.2

Завдання 5.1. Розв'язання ЗЦП

Літак завантажується зброєю двох типів. Значення маси m_i , об'єму V_i і вартості R_i однієї одиниці зброї i -го типу подано в таблиці. Максимальна маса та об'єм зброї, які можуть бути завантажені в літак, становлять $m = 100 + 2N$, $V = 124 - N$ відповідно.

i	m_i	V_i	R_i
1	$N + 2$	$16 - N$	5
2	$11 - N$	$N + 1$	N

Необхідно визначити кількість одиниць зброї кожного типу, щоб ефективність її застосування була максимальною (ефективність застосування зброї прямо пропорційна її вартості). У таблиці значення N , залежно від варіанта, може змінюватися в межах $N = 1 \div 10$.

5.2. Розв'язання транспортних задач

Мета роботи – для свого варіанта вихідних даних розв'язати транспортну задачу (ТЗ) за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*.

Приклад 5.2. Розв'язати ТЗ.

		Млини				Пропозиція
		1	2	3	4	
Елеватори	1	9	7	7	2	20
	2	3	8	5	1	10
	3	2	4	3	6	15
Попит		5	10	5	25	

Етапи виконання роботи

1. Скласти математичну модель ТЗ.

Нехай x_{ij} – це кількість деталей, що транспортуються з i -го елеватора для j -го млина; c_{ij} – це вартість транспортування деталей з i -го елеватора для j -го млина (позначені у маленьких лівих верхніх прямокутниках у комірці), при цьому $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$.

Мета розв'язку – знайти оптимальний план транспортування, при якому вартість транспортування буде мінімальною. Цільова функція ТЗ матиме такий вигляд:

$$Z = 9x_{11} + 7x_{12} + 7x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min.$$

Перша група функціональних обмежень виходить із пропозиції, що сума перевезень не перевищує максимально можливу кількість перевезень з даного елеватора і не менша від неї:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 20;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10;$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 15.$$

Друга група функціональних обмежень виходить із попиту, що сума перевезень до конкретного млина не перевищує його потреби і не менша від них:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 5; \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 10; \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 5; \\x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 25.\end{aligned}$$

Введемо обмеження на знак: сума перевезень з елеватора не повинна бути від'ємною: $x_{ij} \geq 0$; $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$.

Запишемо математичну модель ТЗ у матричному вигляді для зручного використання:

$$\begin{aligned}Z &= C^T X \rightarrow \min \\A_1 X &= B_1; \\A_2 X &= B_2; \\C^T &= (9 \quad 7 \quad 7 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 5 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 6); \\X^T &= (x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \quad x_{34}); \\A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\x_{ij} &\geq 0; i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}.\end{aligned}$$

2. Оформити ТЗ у *MS Excel* та знайти її розв'язок за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*. Готова до роботи з надбудовою таблиця та розв'язання ТЗ подані на рис. 5.3. Екранна форма таблиці містить такі комірки:

- цільову комірку N3 (=СУММПРОИЗВ(\$B\$1:\$M\$1; B3:M3));
- невідомі B1 – M1;
- цільову функцію B3 – M3;
- функціональні обмеження (ліва частина) B4 – M4... B10 – M10;
- функціональні обмеження (права частина) O4 – O10;
- комірки із формулами N4 – N10 (копіюємо з цільової);
- додаткову інформацію.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	$x_{ij} \geq 0$	0	0	0	20	5	0	0	5	0	10	5	0		
2		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}		
3	Z	9	7	7	2	3	8	5	1	2	4	3	6	115	
4	S1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20
5	S2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	10	10
6	S3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	15	15
7	d1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	5	5
8	d2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	10	10
9	d3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	5	5
10	d4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	25	25

Рисунок 5.3

Варіанти розв'язання ТЗ

Варіант 1					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	25	50	35
55		5	5	1	2
60		1	4	2	1
35		1	2	3	2

Варіант 6					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	50	35	50	65
70		5	2	1	3
85		4	5	4	1
45		2	1	4	3

Варіант 2					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	45	25	45
40		2	3	0	2
60		3	4	1	4
50		1	3	1	5

Варіант 7					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	15	25	25	85
70		1	1	1	0
20		2	3	5	1
60		3	2	4	5

Варіант 3					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	20	65	20	50
40		3	1	2	1
55		1	4	1	3
60		1	2	2	3

Варіант 8					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	25	60	30
50		3	4	4	3
50		4	4	2	1
50		3	2	1	2

Варіант 4					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	50	40
70		2	3	4	6
45		3	6	6	6
35		4	5	5	7

Варіант 9					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	60	30
55		6	4	4	4
50		1	2	0	2
45		5	3	4	2

Варіант 5					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	40	50	70
80		4	2	3	2
60		1	1	2	0
60		5	1	6	5

Варіант 10					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	60	25	70	45
90		2	4	1	3
75		3	4	3	5
35		6	6	4	5

6. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ В MS EXCEL

Мета роботи – для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачу про призначення за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*.

Приклад 6.1. Четверо робочих можуть виконувати чотири види робіт. Вартості c_{ij} виконання i -м робочим j -ї роботи наведені в комірках діапазону A1:D4 на рисунку, наведеному нижче.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	4	6	3		Вартість робіт=				0
2	9	10	7	9						0
3	4	5	11	7						0
4	8	7	8	5						0
5										0
6						0	0	0	0	

Рисунок 6.1

У цій таблиці рядки відповідають робочим, а стовпці – роботам.

Необхідно скласти план виконання робіт так, щоб усі роботи були виконані, кожен робочий був завантажений тільки на одній роботі, а сумарна вартість виконання всіх робіт була мінімальною.

Етапи виконання роботи

Відзначимо, що дана задача є збалансованою, тобто число робіт збігається з числом робочих. Якщо задача не збалансована, то перед початком розв'язування її необхідно збалансувати, ввівши бракуюче число фіктивних рядків або стовпців з достатньо великими штрафними вартостями робіт.

Для розв'язання даної задачі побудуємо її математичну модель. Припустимо змінна $x_{ij} = 1$, якщо i -м робочим виконується j -а робота, і $x_{ij} = 0$, якщо i -м робочим не виконується j -а робота. Тоді модель має такий вигляд: знайти

$$Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (6.1)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, \quad j \in [1, 4], \quad (6.2)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i \in [1, 4], \quad (6.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in [1, 4], \quad j \in [1, 4] \quad (6.4)$$

Для розв'язання цієї задачі за допомогою засобу **Поиск решения** введемо під невідомих діапазон комірок F2:I5. У комірку J1 введемо цільову функцію

=СУММПРОИЗВ(F2:I5; A1:D4),

що обчислює вартість робіт. Введемо також формули (6.2), (6.3), що задають ліві частини обмежень. Потім виберемо команду **Сервис, Поиск решения (Tools, Solver)** і заповнимо діалогове вікно **Поиск решения (Solver)**, що відкрилося, як показано на рисунку нижче.

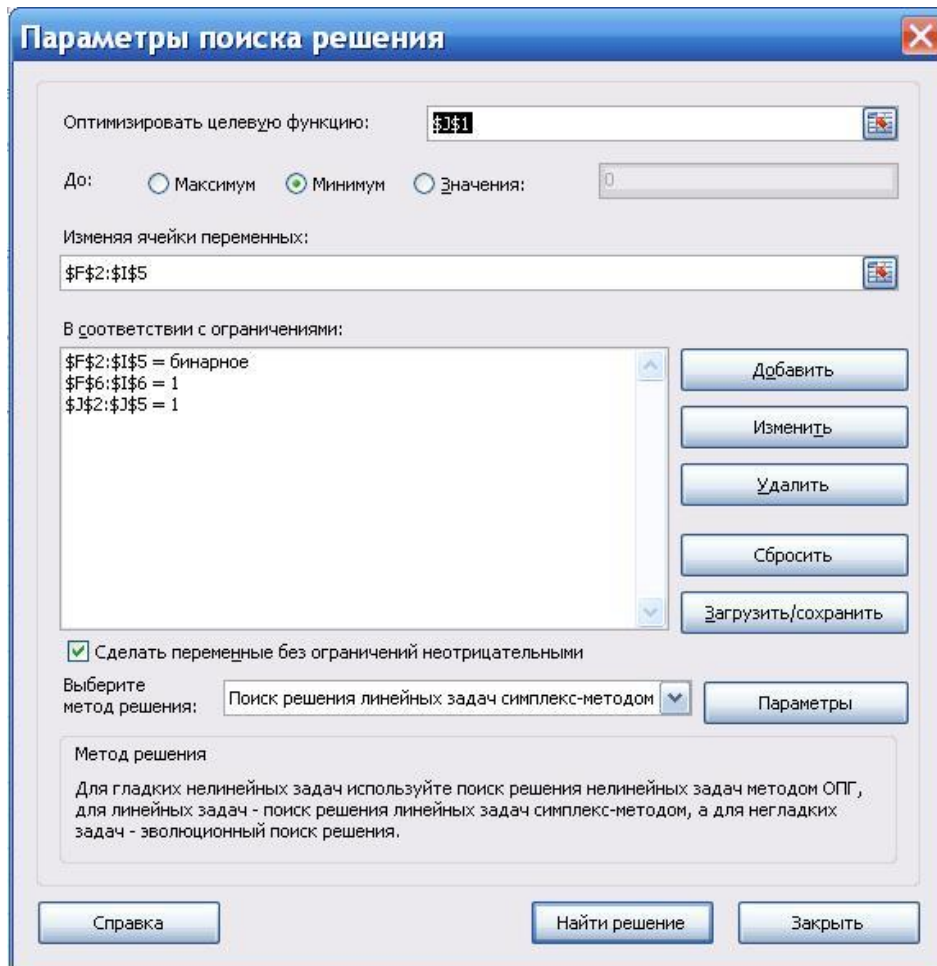


Рисунок 6.2

Не забудьте в діалоговому вікні **Параметры поиска решения** (Solver) встановити прапорець **Линейная модель** (Assume Linear Model). Після натиснення кнопки **Выполнить** (Solve) засіб пошуку розв'язків знайде оптимальний розв'язок, наведений на рисунку.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	4	6	3						18
2	9	10	7	9		1	0	0	0	1
3	4	5	11	7		0	0	1	0	1
4	8	7	8	5		0	1	0	0	1
5						0	0	0	1	1
6						1	1	1	1	

Рисунок 6.3

Завдання 6. Розв'язання задач про призначення в MS Excel

Є n робочих та m видів робіт. Вартість c_{ij} виконання i -м робочим j -ї роботи наведена в таблиці, де робочому відповідає рядок, а роботі – стовпець. Необхідно скласти план виконання робіт так, щоб усі роботи були виконані, кожен робочий був зайнятий тільки на одній роботі, а сумарна вартість виконання всіх робіт була мінімальною.

Варіант 1

Робочі	Роботи				
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Робочий 1	3	6	2	5	11
Робочий 2	1	2	7	11	3
Робочий 3	5	12	11	9	1
Робочий 4	2	4	2	10	5

Варіант 2

Робочі	Роботи				
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Робочий 1	1	3	6	5	7
Робочий 2	5	2	7	8	3
Робочий 3	3	5	1	9	2
Робочий 4	6	4	2	10	5

Варіант 3

Робочі	Роботи				
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Робочий 1	9	4	8	5	7
Робочий 2	1	2	9	8	3
Робочий 3	3	8	1	9	2
Робочий 4	3	4	2	4	5

Варіант 4

Робочі	Роботи			
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4
Робочий 1	8	6	2	5
Робочий 2	5	2	9	8
Робочий 3	3	8	1	9
Робочий 4	1	4	2	3
Робочий 5	3	7	10	5

Варіант 5

Робочі	Роботи				
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Робочий 1	10	8	6	2	7
Робочий 2	6	2	9	8	3
Робочий 3	3	7	1	10	5
Робочий 4	9	10	2	3	4

Варіант 6

Робочі	Роботи			
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4
Робочий 1	9	3	2	7
Робочий 2	5	4	9	8
Робочий 3	7	8	1	10
Робочий 4	1	9	10	3
Робочий 5	2	7	8	5

Варіант 7

Робочі	Роботи				
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Робочий 1	9	4	6	2	10
Робочий 2	6	2	10	8	4
Робочий 3	3	7	1	10	5
Робочий 4	7	10	5	3	9

Варіант 8

Робочі	Роботи			
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4
Робочий 1	10	3	2	4
Робочий 2	5	9	10	8
Робочий 3	7	8	1	9
Робочий 4	11	10	9	12
Робочий 5	2	7	8	10

Варіант 9

Робочі	Роботи				
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5
Робочий 1	5	4	12	2	10
Робочий 2	6	5	10	8	4
Робочий 3	3	7	11	10	8
Робочий 4	10	1	5	11	9

Варіант 10

Робочі	Роботи			
	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4
Робочий 1	5	12	2	7
Робочий 2	10	9	7	12
Робочий 3	7	8	11	9
Робочий 4	2	10	9	13
Робочий 5	12	7	8	3

7. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА В MS EXCEL

Мета роботи – для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачу нелінійного програмування (ЗНП) за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*.

Приклад 7.1. Знайти умовний екстремум функції $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Етапи виконання роботи

Оформити задачу у *MS Excel* та знайти розв'язок за допомогою надбудови *Поиск решения*:

- ✓ невідомі B1, B2;
- ✓ цільова функція B4 ($=6-4*B1-3*B2$);
- ✓ функціональне обмеження (ліва частина) B6 ($=B1^2+B2^2$);
- ✓ функціональне обмеження (права частина) D6 ($=1$).

Готова до роботи з надбудовою таблиця та її розв'язок на **min** наведено на рисунку нижче.

	A	B	C	D
1	x1=	0,799634379		
2	x2=	0,600488016		
3		цільова функція	тип оптимізації	
4	z=	0,999998438	min	
5		ліва частина	тип обмеження	права частина
6	P1:	1,000000997	=	1

Рисунок 7.1

Звіти про результати та стійкість подані на рисунках, наведених нижче відповідно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L															
4	Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.																										
5	Модуль поиска решения																										
6	Модуль: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ																										
7	Время решения: 0,062 секунд.																										
8	Число итераций: 9 Число подзадач: 0																										
9	Параметры поиска решения																										
10	Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование																										
11	Сходимость 0,0001, Размер совокупности 100, Случайное начальное значение 0, Правые производные, Обязательные границы																										
12	Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%																										
13																											
14	Ячейка целевой функции (Минимум)																										
15	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Окончательное значение</th></tr><tr><td>\$B\$4</td><td>z=</td><td>6</td><td>0,999998438</td></tr></table>												Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	\$B\$4	z=	6	0,999998438							
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение																								
\$B\$4	z=	6	0,999998438																								
16																											
17																											
18																											
19	Ячейки переменных																										
20	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Окончательное значение</th><th>Целочисленное</th></tr><tr><td>\$B\$1</td><td>x1=</td><td>0</td><td>0,799634379</td><td>Продолжить</td></tr><tr><td>\$B\$2</td><td>x2=</td><td>0</td><td>0,600488016</td><td>Продолжить</td></tr></table>												Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	\$B\$1	x1=	0	0,799634379	Продолжить	\$B\$2	x2=	0	0,600488016	Продолжить
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное																							
\$B\$1	x1=	0	0,799634379	Продолжить																							
\$B\$2	x2=	0	0,600488016	Продолжить																							
21																											
22																											

Рисунок 7.2

	A	B	C	D	E
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости				
2	Лист: [Книга1]Лист1				
3	Отчет создан: 26.10.2013 17:41:48				
4					
5					
6	Ячейки переменных				
7					Окончательное Приведенн.
8	Ячейка	Имя	Значение	Градиент	
9	\$B\$1	x1=	0,799634379	0	
10	\$B\$2	x2=	0,600488016	0	
11					
12	Ограничения				
13					Окончательное Лагранжа
14	Ячейка	Имя	Значение	Множитель	
15	\$B\$6	P1:	1,000000997	-2,50114031	

Рисунок 7.3

Як показує звіт про результати, $Z_{\min} = 1$, $x_1 = 0,8$, або $4/5$, $x_2 = 0,6$, або $3/5$. При цьому зі звіту про стійкість видно, що множник Лагранжа дорівнює $\lambda = -2,5$, або $-5/2$. Це повністю збігається з теоретичним розв'язком за методом множників Лагранжа.

Аналогічно, розв'язання ЗНП на **max** дає такі результати, наведені на рисунку нижче.

	A	B	C	D
1	x1=	-0,799678349		
2	x2=	-0,600428927		
3		цільова функція	тип оптимізації	
4	z=	11,00000017	max	
5		ліва частина	тип обмеження	права частина
6	P1:	1,000000357	=	1
7				

Рисунок 7.4

Відповідь: $Z_{\min} = 1$, $x_1 = 4/5$, $x_2 = 3/5$, $\lambda = -5/2$.

$Z_{\max} = 11$, $x_1 = -4/5$, $x_2 = -3/5$, $\lambda = 5/2$.

Завдання 7. Розв'язання ЗНП за допомогою методу множників Лагранжа в MS Excel

Для свого варіанта вихідних даних знайти умовний екстремум функції Z , використовуючи надбудову *Поиск решения MS Excel*.

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
1	$Z = 2x_1^2 + x_2^2$, $2x_1 + 3x_2 = 5$	6	$Z = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2$, $x_1 + 5x_2 = 12$
2	$Z = x_1^2 - x_2^2$, $3x_1 + 4x_2 = 12$	7	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$ $3x_1 + 6x_2 = 30$
3	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$ $2x_1 - x_2 = 5$	8	$Z = 3x_1^2 + 2x_2^2$, $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$
4	$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$	9	$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3$, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
5	$Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2$, $x_1 + 3x_2 = 6$	10	$Z = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

8. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ БЕЗ СІДЛОВОЇ ТОЧКИ В MS EXCEL

Мета роботи – для свого варіанта вихідних даних розв'язати матричну гру без сідлової точки за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*.

Приклад 8.1. Знайти розв'язок гри, платіжна матриця якої має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Етапи виконання роботи

1. Перевірити платіжну матрицю на сідлову точку. Нижню та верхню ціни гри знайти за допомогою функцій *MS Excel МИН* і *МАКС*. Матрицю та результати розрахунків оформити на аркуші *MS Excel*, який назвати **Матриця** (приклад на рисунку нижче).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		B1	B2	B3	B4	α_i					
2	A1	4	3	4	2	2					
3	A2	3	4	6	5	3	$\alpha =$	3			
4	A3	2	5	1	3	1					
5	β_j	4	5	6	5		3	\leq	3,5	\leq	4
6			$\beta =$	4							

Рисунок 8.1

2. Якщо сідлової точки немає, то записати у зошиті пару двоїстих симетричних задач, до яких зводиться ця задача.

Визначення оптимальної стратегії гравця А зводиться до такої ЗЛП:

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \min \quad (8.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \geq 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1, \end{cases} \quad (8.2)$$

$$t_1, t_2, t_3 \geq 0. \quad (8.3)$$

Двоїста ЗЛП, що визначає оптимальну стратегію гравця В, має вигляд:

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \rightarrow \max \quad (8.4)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \leq 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \leq 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \leq 1, \end{cases} \quad (8.5)$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0. \quad (8.6)$$

3. Уставити в книгу *MS Excel* аркуші **A** і **B**, на яких оформити пару двоїстих симетричних задач: (8.1)–(8.3), (8.4)–(8.6), як показано на рисунках, наведених нижче. Розв'язати ці задачі за допомогою надбудови *MS Excel Поиск решения*.

	A	B	C	D	E	F	G
1		t1	t2	t3			
2		0,1429	0,1429	0			
3	Z=	1	1	1	0,2857	min	
4	P1:	4	3	2	1	>=	1
5	P2:	3	4	5	1	>=	1
6	P3:	4	6	1	1,4286	>=	1
7	P4:	2	5	3	1	>=	1
8							
9	v=	3,5					
10	x1=	0,5					
11	x2=	0,5					
12	x3=	0					

Рисунок 8.2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		u1	u2	u3	u4			
2		0,2143	0	0	0,0714			
3	W=	1	1	1	1	0,2857	max	
4	P1:	4	3	4	2	1	<=	1
5	P2:	3	4	6	5	1	<=	1
6	P3:	2	5	1	3	0,6429	<=	1
7								
8	y1=	0,75						
9	y2=	0						
10	y3=	0						
11	y4=	0,25						

Рисунок 8.3

4. На підставі отриманих результатів знайти ціну гри та вектори оптимальних стратегій гравців А і В за такими формулами:

$$v = \frac{1}{Z_{\min}}; \quad (8.7)$$

$$x_i = vt_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (8.8)$$

$$y_j = vu_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (8.9)$$

Ціну гри навести на аркуші **Матриця**, а вектори оптимальних стратегій гравців А і В – на аркушах **А** і **В** відповідно.

Відповідь: ціна гри $v = 3,5$; оптимальна стратегія гравця А $X^* = (0,5; 0,5; 0)$; оптимальна стратегія гравця В $Y^* = (0,75; 0; 0; 0,25)$.

**Завдання 8. Розв’язання матричної гри без сідлової точки
в *MS Excel***

Для свого варіанта вихідних даних знайти розв’язок гри, платіжна матриця якої має вигляд:

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
1	$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	7	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	9	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Розкрийте предмет та основні поняття математичного моделювання в економіці та менеджменті.
2. Наведіть класифікацію економіко-математичних моделей.
3. Які існують етапи економіко-математичного моделювання?
4. Охарактеризуйте загальну, стандартну та канонічну задачі лінійного програмування.
5. Поясніть особливості матричної та векторної форм запису канонічної задачі.
6. Які правила зведення будь-якої лінійної задачі до стандартного вигляду?
7. Наведіть визначення основних понять геометрії опуклих множин.
8. Подайте формулювання та математичну модель задачі про використання ресурсів.
9. Подайте формулювання та математичну модель задачі складання раціону.
10. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про використання потужностей.
11. Сформулюйте та наведіть математичну модель задачі про розкрій матеріалів.
12. Сформулюйте і наведіть математичну модель транспортної задачі.
13. Поясніть геометричний зміст нерівностей, умови невід'ємності змінних і цільової функції.
14. Опишіть алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування, його переваги та недоліки.
15. Як можна виконати зведення загальної задачі лінійного програмування до канонічної форми?
16. Розкрийте зміст поняття симплекс-методу та наведіть його алгоритм.
17. Яка ознака оптимальності опорного плану?

18. Охарактеризуйте метод штучного базису.
19. Розкрийте поняття й вид двоїстої задачі лінійного програмування.
20. Наведіть правила побудови двоїстих задач.
21. Сформулюйте теореми двоїстості.
22. Наведіть економічну інтерпретацію двоїстої задачі.
23. Охарактеризуйте постановку задачі цілочислового програмування.
24. У чому полягає сутність методів відтинання?
25. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
26. Наведіть алгоритм методу «гілок і меж».
27. Охарактеризуйте метод мінімальної вартості.
28. Поясніть алгоритм методу потенціалів.
29. Охарактеризуйте постановку задачі про призначення.
30. Наведіть постановку задачі нелінійного програмування.
31. Наведіть алгоритм графічного методу розв'язування задачі нелінійного програмування.
32. Поясніть алгоритм методу множників Лагранжа.
33. Розкрийте сутність основних понять теорії ігор: гри, гравців, ви-
грашу, правил, ходу гравця, його стратегії, рішення гри, умови стійкості оп-
тимальної стратегії. Сформулюйте предмет, мету та основну задачу теорії
ігор.
34. Що таке платіжна матриця? Як визначається нижня та верхня ці-
ни гри?
35. У чому полягає сутність методів розв'язування скінченної гри без
сідлової точки?
36. Наведіть алгоритм зведення матричної гри без сідлової точки до
задачі лінійного програмування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білоцерківський О. Б. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 6.03060101 «Менеджмент організацій» та 6.03060102 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» / О. Б. Білоцерківський. – Х. : НТУ «ХП», 2014. – 40 с.
2. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання : текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, О. О. Замула, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХП», 2010. – 108 с.
3. Іващук О. Т. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / О. Т. Іващук. – Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
4. Алесинская Т. В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели» / Т. В. Алесинская. – Таганрог : ТРТУ, 2002. – 153 с.
5. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посіб. / І. Ю. Івченко. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.
6. Лугінін О. Є. Економетрія : навч. посіб. / О. Є. Лугінін, С. В. Білоусова, О. М. Білоусов. – К. : Центр учбової літератури, 2005. – 252 с.
7. Білоцерківський О. Б. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей 7.050206 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності» та 6.030508 «Фінанси» / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва. – Х. : НТУ «ХП», 2009. – 76 с.
8. Алесинская Т. В. Учебно-методическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование» / Т. В. Алесинская, В. Д. Сербин, А. В. Катаев. – Таганрог : ТРТУ, 2001. – 79 с.
9. Мур Д. Х. Экономическое моделирование в *Microsoft Excel* / Д. Х. Мур, Л. Р. Уэдерфорд. – М. : Вильямс, 2004. – 1024 с.
10. Расторгуев Д. Н. Методические рекомендации к практическим занятиям по компьютерному моделированию социально-экономических процессов / Д. Н. Расторгуев. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 32 с.
11. Гарнаев А. Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах / А. Ю. Гарнаев. – СПб. : БХВ, 1999. – 336 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Побудова графіків функцій в <i>MS Excel</i>	4
2. Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом.....	5
3. Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою надбудови <i>MS Excel Поиск решения</i>	10
4. Аналіз оптимального розв'язання на чутливість у <i>MS Excel</i>	20
5. Розв'язання задач цілочислового програмування та транспортних задач.....	27
6. Розв'язання задач про призначення в <i>MS Excel</i>	32
7. Розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою методу множників Лагранжа в <i>MS Excel</i>	37
8. Розв'язання матричної гри без сідлової точки в <i>MS Excel</i>	40
Контрольні запитання.....	44
Список літератури.....	46

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з курсу

«Математичне моделювання в економіці та менеджменті»

для студентів спеціальностей

6.03060101 «Менеджмент організацій і адміністрування» та

6.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»

Укладач **БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ** Олександр Борисович

Відповідальний за випуск В. А. Міщенко

Роботу до видання рекомендував О. О. Замула

Редактор Ю. І. Гуренко

План 2015 р., поз. 155

Підп. до друку _____.15. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.

Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.

Наклад 50 прим. Зам №_____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХП".

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків 2, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХП". 62002, Харків 2, вул. Фрунзе, 21